Κεφάλαιο 3

Τοπολογία μετρικών χώρων

3.1 Ανοικτά και κλειστά σύνολα

3.1.1 Ανοικτά σύνολα

Ορισμοί 3.1.1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$.
(α) Η ανοικτή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

(β) Η κλειστή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$\widehat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

(γ) Η ρ-σφαίρα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τη μετρική στην οποία αναφερόμαστε, θα παραλείπουμε τον δείκτη στα αντίστοιχα σύνολα και θα γράφουμε απλώς $B(x_0,\varepsilon), S(x_0,\varepsilon)$ κ.λπ.

Παραδείγματα 3.1.2. (α) Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ. Στον (X,δ) αν $r > 0$ έχουμε

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < r \leq 1 \\ X, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$

και

$$S(x,r) = \begin{cases} X \setminus \{x\}, & \text{αν } r = 1 \\ \emptyset, & \text{αν } r \neq 0, r \neq 1. \end{cases} .$$

(β) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon),\qquad \widehat{B}(x,\varepsilon)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon],\qquad S(x,\varepsilon)=\{x-\varepsilon,x+\varepsilon\}.$$

(γ) Στο $[0,2]$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(1/2,1)=[0,3/2),\qquad \widehat{B}(1/2,1)=[0,3/2],\qquad S(1/2,1)=\{3/2\}.$$

(δ) Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$. Αν $\rho_1,\rho_2,\rho_\infty$ είναι οι επαγόμενες μετρικές, τότε

$$\widehat{B}_{\rho_1}(0,1)=\{(x,y):|x|+|y|\leq 1\}$$

(ρόμβος με κορυφές τα $(\pm 1,0)$ και $(0,\pm 1)$),

$$\widehat{B}_{\rho_2}(0,1)=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$$

(δίσκος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1) και

$$\widehat{B}_{\rho_\infty}(0,1)=\{(x,y):|x|\leq 1,|y|\leq 1\}$$

(τετράγωνο με κορυφές τα $(\pm 1,\pm 1)$).

Ορισμός 3.1.3 (εσωτερικό σημείο). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$. Το $x\in A$ λέγεται *εσωτερικό σημείο* (*interior point*) του A αν υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq A$.

Ορισμός 3.1.4 (ανοικτό σύνολο). Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $G\subseteq X$. Το G λέγεται *ρ-ανοικτό* (*open*) αν για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x)\subseteq G$. Δηλαδή, αν κάθε σημείο του G είναι εσωτερικό του σημείο.

Παραδείγματα 3.1.5. (α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι: έστω $B(x,r)$ μια ανοικτή μπάλα σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και έστω $y\in B(x,r)$. Αφού $\rho(x,y)<r$, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\varepsilon<r-\rho(x,y)$. Η μπάλα $B(y,\varepsilon)$ περιέχεται στην $B(x,r)$, γιατί αν $t\in B(y,\varepsilon)$ τότε $\rho(y,t)<\varepsilon$ και η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\rho(t,x)\leq\rho(t,y)+\rho(y,x)<\varepsilon+\rho(x,y)<r.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $t\in B(x,r)$, άρα $B(y,\varepsilon)\subseteq B(x,r)$.

(β) Θεωρούμε τη διακριτή μετρική δ σε ένα μη κενό σύνολο X. Κάθε υποσύνολο του (X,δ) είναι ανοικτό. Πράγματι, έστω $A\subseteq X$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό: αν $a\in A$ τότε για $0<\varepsilon<1$ ισχύει $B_\delta(a,\varepsilon)=\{a\}\subseteq A$.

(γ) Τα διαστήματα της μορφής $(a,b]$ στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $a<b$ δεν είναι ανοικτά. Αν θεωρήσουμε τη μπάλα με κέντρο το b και ακτίνα $\varepsilon>0$ οσοδήποτε μικρή, τότε $B(b,\varepsilon)\nsubseteq(a,b]$, διότι $b+\frac{\varepsilon}{2}\in B(b,\varepsilon)$ αλλά $b+\frac{\varepsilon}{2}\notin(a,b]$.

(δ) Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, διότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*[1]

(α) *Τα $X,\emptyset$ είναι ανοικτά.*

(β) *Αν $(G_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.*

(γ) *Αν τα $G_1, G_2, \dots, G_n$ είναι ανοικτά τότε το $\bigcap_{i=1}^n G_i = G_1\cap\cdots\cap G_n$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου.

(β) Έστω $x\in\bigcup_{i\in I} G_i$. Τότε, υπάρχει $i_0\in I$ ώστε $x\in G_{i_0}$. Αφού το G_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε $B(x,\varepsilon_0)\subseteq G_{i_0}\subseteq\bigcup_{i\in I} G_i$. Άρα, το $\bigcup_{i\in I} G_i$ είναι ανοικτό.

(γ) Έστω $x\in G_1\cap\cdots\cap G_n$. Τότε, $x\in G_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Αφού όλα τα G_i είναι ανοικτά, για κάθε $i=1,\dots,n$ υπάρχει $\varepsilon_i>0$ ώστε $B(x,\varepsilon_i)\subseteq G_i$. Θέτουμε $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}>0$. Τότε, για κάθε $i=1,\dots,n$ έχουμε $\varepsilon\le\varepsilon_i$, άρα

$$B(x,\varepsilon)\subseteq B(x,\varepsilon_i)\subseteq G_i.$$

Συνεπώς, $B(x,\varepsilon)\subseteq\bigcap_{i=1}^n G_i$. □

Σημείωση 3.1.7. Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) τότε η τομή τους δεν είναι κατ' ανάγκην ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, αν στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρήσουμε την ακολουθία των ανοικτών συνόλων $G_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty G_n=\{0\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Η επόμενη πρόταση δίνει ένα χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω της σύγκλισης ακολουθιών.

Πρόταση 3.1.8. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G\subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

(β) *Για κάθε $x\in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n\xrightarrow{\rho}x$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n\ge n_0$ τότε $x_n\in G$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Έστω $x\in G$ και (x_n) ακολουθία στο X με $x_n\xrightarrow{\rho}x$. Αφού το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $B(x,\varepsilon)\subseteq G$. Αφού $x_n\xrightarrow{\rho}x$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n\ge n_0$ τότε $\rho(x_n,x)<\varepsilon$. Συνεπώς, $x_n\in B(x,\varepsilon)\subseteq G$ για κάθε $n\ge n_0$.

[1] Όταν έχουμε μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X η οποία περιέχει το X, το κενό σύνολο, είναι κλειστή ως προς ενώσεις και πεπερασμένες τομές, τότε λέμε ότι έχουμε μια *τοπολογία* στο X. Με αυτή την ορολογία, η Πρόταση 3.1.6 μας λέει ότι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (έτσι όπως αυτά ορίσθηκαν) είναι μια τοπολογία σ' αυτόν.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α), δηλαδή ότι το G δεν είναι ανοικτό. Τότε, υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ η μπάλα $B(x, \varepsilon)$ να μην περιέχεται στο G.

Συνεπώς, για $n = 1, 2, ...$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G)$, δηλαδή

$$x_n \notin G \quad \text{και} \quad \rho(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (x_n) συγκλίνει στο x και όλοι οι όροι της είναι εκτός του G, οπότε δεν ισχύει το (β). □

Πόρισμα 3.1.9. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο V του X είναι ανοικτό αν και μόνον αν είναι (ενδεχομένως άπειρη) ένωση από ανοικτές μπάλες του X.*

Απόδειξη. Αν το V είναι ένωση από ανοικτές μπάλες τότε είναι ανοικτό σύμφωνα με την πρόταση 3.1.6. Αντίστροφα, έστω ότι το V είναι ανοικτό. Τότε, για κάθε $x \in V$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subseteq V$. Παρατηρήστε ότι $V = \bigcup_{x \in V} B(x, \varepsilon_x)$. □

Πρόταση* 3.1.1 (ανοικτά υποσύνολα της ευθείας)**.** *Κάθε ανοικτό σύνολο U στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.*

Απόδειξη. Έστω $x \in U$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Θέτουμε

$$a_x = \inf\{s : (s, x] \subseteq U\}.$$

Τότε $(a_x, x] \subseteq U$: αν $t \in (a_x, x]$ τότε το t δεν είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{s : (s, x] \subseteq U\}$, άρα υπάρχει $s < t$ με $(s, x] \subseteq U$, άρα $t \in U$. Με ανάλογο τρόπο, αν θέσουμε

$$b_x = \sup\{t : [x, t) \subseteq U\}$$

αποδεικνύεται ότι $[x, b_x) \subseteq U$. Συνεπώς για κάθε $x \in U$ ισχύει $(a_x, b_x) \subseteq U$, άρα

$$(*) \qquad U = \bigcup_{x \in U} (a_x, b_x).$$

Ισχυρισμός 1. Αν $z, x \in U$ και $z \in (a_x, b_x)$ τότε $(a_x, b_x) = (a_z, b_z)$.

Πράγματι, $[z, b_x) \subseteq U$ άρα $b_x \leq b_z$ και $(a_x, z] \subseteq U$ άρα $a_z \leq a_x$. Συνεπώς, $(a_x, b_x) \subseteq (a_z, b_z)$. Τώρα, αφού $x \in (a_z, b_z)$, το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $(a_z, b_z) \subseteq (a_x, b_x)$.

Ισχυρισμός 2. Αν $x, y \in U$ τότε είτε $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$ ή $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$.

Πράγματι, έστω ότι $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) \neq \emptyset$. Τότε, θεωρούμε $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$ και χρησιμοποιώντας τον πρώτο ισχυρισμό παίρνουμε

$$(a_x, b_x) = (a_z, b_z) = (a_y, b_y).$$

Από τον δεύτερο ισχυρισμό και την $(*)$ είναι φανερό ότι το U γράφεται στη μορφή

$$U = \bigcup_{j \in J} I_j,$$

όπου I_j ξένα ανά δύο μη κενά ανοικτά διαστήματα. Τέλος, η παραπάνω ένωση είναι αριθμήσιμη: ορίζουμε $\tau : J \to \mathbb{Q}$ ως εξής: αν $j \in J$ επιλέγουμε ως $\tau(j)$ τυχόντα ρητό $q_j \in I_j$. Η τ είναι ένα προς ένα, διότι τα I_j είναι ξένα. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το J είναι επίσης αριθμήσιμο. $\square$

3.1.2 Κλειστά σύνολα

Ορισμός 3.1.10 (κλειστό σύνολο)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F λέγεται *ρ-κλειστό* (*closed*) αν το συμπλήρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι ρ-ανοικτό.

Παραδείγματα 3.1.11. (α) Σε κάθε μετρικό χώρο (X, ρ) τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in X$ είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί).

(β) Κάθε κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x, r)$ είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, το $X \setminus \widehat{B}(x, r)$ είναι ανοικτό: έστω $y \in X \setminus \widehat{B}(x, r)$. Τότε, $\rho(x, y) > r$. Επιλέγουμε $0 < \eta < \rho(x, y) - r$ και έχουμε ότι $B(y, \eta) \subseteq X \setminus \widehat{B}(x, r)$ διότι, αν $z \in B(y, \eta)$ έχουμε $\rho(z, y) < \eta$ και

$$\rho(z, x) \geq \rho(y, x) - \rho(z, y) > \rho(x, y) - \eta > r,$$

δηλαδή $z \in X \setminus \widehat{B}(x, r)$.

Ειδικότερα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο (εξηγήστε γιατί).

(γ) Το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι κλειστό σύνολο, διότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.

(δ) Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ. Κάθε υποσύνολο του (X, δ) είναι κλειστό (εξηγήστε γιατί).

(ε) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Έστω $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στον X, ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$E = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$$

είναι κλειστό στον (X, d).

Πράγματι, αν $y \notin E$, τότε $\delta = d(x, y) > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \delta/2)$ για κάθε $n > n_0$. Θέτουμε

$$r = \min\{d(y, x_i) : i = 1, 2, \dots, n_0\} > 0.$$

Αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \min\{r/2, \delta/2\}$, ελέγχουμε εύκολα ότι $B(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus E$.

Σημείωση 3.1.12. Όπως δείχνουν τα προηγούμενα παραδείγματα, ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ) μπορεί να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Επίσης, ένα σύνολο που είναι ανοικτό (αντιστοίχως, κλειστό) μπορεί να είναι και κλειστό (αντιστοίχως, ανοικτό).[2]

[2] Τα σύνολα που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά αναφέρονται συχνά ως clopen.

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών. Αν (X,ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$, τότε το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $x_n \in G$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ισοδυναμία μπορούμε να δώσουμε αντίστοιχο χαρακτηρισμό για τα κλειστά σύνολα: είναι εκείνα τα υποσύνολα του X που *περιέχουν τα όρια συγκλινουσών ακολουθιών στοιχείων τους*:

Πρόταση 3.1.13. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

(β) *Αν (x_n) είναι ακολουθία στο F με $x_n \xrightarrow{\rho} x \in X$, τότε $x \in F$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό και θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο F η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Έστω ότι $x \notin F$. Τότε, $x \in X \setminus F$ και το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in X \setminus F$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $n \geq n_0$ παίρνουμε $x_n \notin F$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση υποθέτουμε ότι ισχύει το (β) αλλά το F δεν είναι κλειστό. Τότε, το $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $x \in X \setminus F$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$, βρίσκουμε $x_n \in F$ ώστε $\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$. Η (x_n) είναι ακολουθία στο F και $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού έχουμε δεχτεί το (β), έπεται ότι $x \in F$. Αυτό είναι άτοπο. □

Οι βασικές ιδιότητες της οικογένειας των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων:

Πρόταση 3.1.14. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Τα $X, \emptyset$ είναι κλειστά.*

(β) *Αν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^n F_i$ είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $(E_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η τομή τους $\bigcap_{i\in I} E_i$ είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από τους τύπους του De Morgan

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \quad \text{και} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

και από τον ορισμό του κλειστού συνόλου ως συμπληρώματος ανοικτού συνόλου. □

Σημείωση 3.1.15. Αν έχουμε μια άπειρη οικογένεια κλειστών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο, τότε η ένωσή τους δεν είναι κατ᾽ ανάγκην κλειστό σύνολο. Πράγματι, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε την ακολουθία κλειστών διαστημάτων $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 2,3,\ldots$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1]$ και το $(0,1]$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.2 Εσωτερικό και κλειστή θήκη

3.2.1 Εσωτερικό συνόλου

Ορισμός 3.2.1 (εσωτερικό συνόλου)**.** Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Το *εσωτερικό* (*interior*) του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A και συμβολίζεται με $\mathrm{int}A$ (ή A°). Δηλαδή,

$$A^\circ \equiv \mathrm{int}A = \{x \in A \mid \exists\, \varepsilon > 0 \ :\ B(x,\varepsilon) \subseteq A\}\,.$$

Σημείωση 3.2.2. Για κάθε $A \subseteq X$ το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Αν $y \in B(x,\varepsilon)$ τότε, θέτοντας $\delta = \varepsilon - \rho(x,y) > 0$ έχουμε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Συνεπώς, κάθε $y \in B(x,\varepsilon)$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \subseteq A^\circ$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του A°.

Παραδείγματα 3.2.3. (α) Το εσωτερικό του $(a,b]$ στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική είναι το (a,b).

(β) Το εσωτερικό του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$.

(γ) Το εσωτερικό μιας ανοικτής μπάλας σε ένα μετρικό χώρο είναι η ίδια η μπάλα.

Οι βασικές ιδιότητες του εσωτερικού περιγράφονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω A, B υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(α) $A^\circ \subseteq A$.

(β) $A^\circ = \bigcup\{V \subseteq A : V$ *ανοικτό*$\}$. *Ισοδύναμα, το εσωτερικό του A είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.*

(γ) $A^\circ = A$ *αν και μόνον αν το A είναι ανοικτό.*

(δ) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(ε) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(στ) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Απόδειξη. (α) Είναι άμεσο από τον ορισμό.

(β) Αν $x \in A^\circ$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Άρα

$$x \in B(x,\varepsilon) \subseteq \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$$

διότι το $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A.

Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcup\{V \subseteq A : V$ ανοικτό$\}$. Τότε, υπάρχει $V_x \subseteq A$ ανοικτό, ώστε $x \in V_x$. Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \subseteq V_x$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq A$, οπότε $x \in A^\circ$.

(γ) Από τον προηγούμενο ισχυρισμό έχουμε ότι το A° είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. Συνεπώς, αν $A^\circ = A$ έπεται ότι το A είναι ανοικτό.

Αντίστροφα, αν το A είναι ανοικτό τότε $A^\circ = A$. Πράγματι: από το (α) αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq A^\circ$. Αλλά, αφού το A είναι ανοικτό, έχουμε ότι κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $A \subseteq A^\circ$.

(δ) Έστω $A \subseteq B$ και έστω $x \in A^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A \subseteq B$. Από τον ορισμό του εσωτερικού σημείου έχουμε ότι $x \in B^\circ$.

(ε) Είναι $A \cap B \subseteq A$, άρα $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ από το (δ). Ομοίως, έχουμε ότι $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Συνεπώς,

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ.$$

Ακόμη, $A^\circ \subseteq A$ και $B^\circ \subseteq B$, άρα $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. Αφού το $A^\circ \cap B^\circ$ είναι ανοικτό, από το (β) έχουμε

$$A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(στ) Ισχύει $A \subseteq A \cup B$, άρα $A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Ομοίως, παίρνουμε $B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, οπότε έχουμε $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. □

Σημείωση 3.2.5. Ο τελευταίος εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική για $A = [0,1]$ και $B = (1,2)$ έχουμε $A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$ ενώ, $(A \cup B)^\circ = (0,2)$.

Άλλο παράδειγμα μας δίνουν τα $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στον ίδιο χώρο. Έχουμε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $A \cup B = \mathbb{R}$. Συνεπώς, $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, ενώ $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

3.2.2 Κλειστή θήκη συνόλου

Ορισμός 3.2.6 (σημείο επαφής)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται *σημείο επαφής* (*contact point*) του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι το $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση (δείτε το επιχείρημα της απόδειξης της Πρότασης 3.1.13).

Παραδείγματα 3.2.7. (α) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A = (0,1]$. Το σημείο 0 είναι σημείο επαφής του A.

(β) Αν (x_n) είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε το x είναι σημείο επαφής του συνόλου $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(γ) Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Αν $A \subseteq (X,\delta)$, τότε ένα $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν $x \in A$.

Ορισμός 3.2.8 (κλειστή θήκη)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Η *κλειστή θήκη* (*closure*) $\overline{A}$ (ή $\mathrm{cl}(A)$) του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του. Δηλαδή,

$$\overline{A} \equiv \mathrm{cl}(A) = \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0, A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Σημείωση 3.2.9. Για κάθε $A \subseteq X$ η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $a_n \in A$ ώστε $\rho(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$, διότι κάθε x_n είναι σημείο επαφής του A. Τότε,

$$\rho(a_n, x) \leq \rho(a_n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0,$$

δηλαδή $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Η (a_n) είναι ακολουθία στο A και $a_n \xrightarrow{\rho} x$. Συνεπώς, $x \in \overline{A}$.

Παραδείγματα 3.2.10. (α) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι σχέσεις $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
(β) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε $\mathrm{cl}\,(a,b) = \mathrm{cl}\,(a,b] = \mathrm{cl}\,[a,b) = [a,b]$.
(γ) Θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο με τη διακριτή μετρική δ. Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A} = A$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες της κλειστής θήκης.

Πρόταση 3.2.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε, ισχύουν τα εξής:*
(α) $A \subseteq \overline{A}$.
(β) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F$ *κλειστό*$\}$. *Ισοδύναμα, η κλειστή θήκη του A είναι το ελάχιστο κλειστό υποσύνολο του X στο οποίο περιέχεται το A.*
(γ) $A = \overline{A}$ *αν και μόνον αν το A είναι κλειστό.*
(δ) *Αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
(ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη. (α) Προφανές από τον ορισμό της κλειστής θήκης. Κάθε σημείο του A είναι σημείο επαφής του A.
(β) Είδαμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και $A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς, $\cap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\} \subseteq \overline{A}$.
Αντίστροφα, έστω F κλειστό σύνολο ώστε $A \subseteq F$. Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Τότε, $x_n \in F$ και αφού το F είναι κλειστό συμπεραίνουμε ότι $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$. Δηλαδή, $\overline{A} \subseteq F$. Έπεται ότι $\overline{A} \subseteq \cap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\}$.
(γ) Αν $A = \overline{A}$ τότε το A είναι κλειστό διότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό τότε, αφού το A περιέχεται στον εαυτό του, έχουμε $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F$ κλειστό$\} \subseteq A$, δηλαδή $\overline{A} \subseteq A$. Ούτως ή άλλως ισχύει $A \subseteq \overline{A}$, οπότε παίρνουμε τελικά την ισότητα $A = \overline{A}$.
(δ) Αν $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, δηλαδή $A \subseteq \overline{B}$. Το $\overline{B}$ είναι ένα κλειστό σύνολο που περιέχει το A, άρα περιέχει και το ελάχιστο κλειστό που περιέχει το A, δηλαδή την κλειστή θήκη του A. Έτσι, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
(ε) Χρησιμοποιώντας το (δ) και τους εγκλεισμούς $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ βλέπουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Επιπλέον, είναι $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$

άρα $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Αφού το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό σύνολο, από το (β) προκύπτει ότι $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Τελικά, έχουμε ότι $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(στ) Ισχύει $A \cap B \subseteq A$, οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$. Ομοίως, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$, άρα $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. $\square$

Σημείωση 3.2.12. Ο εγκλεισμός στην τελευταία σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχουμε $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \emptyset$ ενώ, $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

Η επόμενη Πρόταση δίνει μια πολύ χρήσιμη σχέση δυϊσμού για την κλειστή θήκη και το εσωτερικό:

Πρόταση 3.2.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

(β) $X \setminus A^{\circ} = \overline{X \setminus A}$.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Τότε, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, $x \in \overline{A}$.
2. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Ισοδύναμα, $x \in (X \setminus A)^{\circ}$.

Αυτό αποδεικνύει ότι τα σύνολα $\overline{A}$ και $(X \setminus A)^{\circ}$ είναι ξένα και έχουν ως ένωση το X. Έπεται ότι $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

(β) Εφαρμόζοντας την προηγούμενη ισότητα με το $X \setminus A$ στη θέση του A, παίρνουμε

$$X \setminus \overline{X \setminus A} = (X \setminus (X \setminus A))^{\circ} = A^{\circ}.$$

Παίρνοντας συμπληρώματα βλέπουμε ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{\circ}$. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με τον ορισμό των συνόλων G_δ και F_σ σε έναν μετρικό χώρο.

Ορισμός 3.2.14 (σύνολα G_δ και F_σ)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.

(α) Το A λέγεται σύνολο G_δ αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X.

(β) Το A λέγεται σύνολο F_σ αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του X.

Παραδείγματα 3.2.15. (α) Κάθε κλειστό σύνολο είναι προφανώς F_σ. Είναι όμως και G_δ.

(β) Κάθε ανοικτό σύνολο είναι προφανώς G_δ. Είναι όμως και F_σ.

(γ) Ένα σύνολο A είναι G_δ αν και μόνον αν το A^c είναι F_σ.

(δ) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ το διάστημα $(a, b]$ είναι F_σ και G_δ. Πράγματι, αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $a + \frac{1}{k} < b$, έχουμε

$$(a, b] = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Οι αποδείξεις των ισχυρισμών (α), (β) και (γ) αφήνονται για τις ασκήσεις του Κεφαλαίου.

3.3 Σχετικώς ανοικτά και κλειστά σύνολα

3.3.1 Σχετικώς ανοικτά σύνολα

Στο Κεφάλαιο 1 δώσαμε τον ορισμό της σχετικής μετρικής: αν A είναι μη κενό υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, ρ), η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$, $x, y \in A$ είναι μετρική στο A. Η επόμενη πρόταση περιγράφει τα ανοικτά σύνολα του (A, ρ_A).

Πρόταση 3.3.1. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε:*

(α) *Το $G \subseteq A$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο (A, ρ_A) αν και μόνον αν υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $G = A \cap V$.*

(β) *Αν $B \subseteq A$, τότε $A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B)$.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A). Τότε, γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) = \bigcup_{x \in G} \left(B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A\right) = A \cap \left(\bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)\right).$$

[Για την πρώτη ισότητα παρατηρήστε ότι μια μπάλα σε έναν μετρικό υπόχωρο είναι μια μπάλα που έχει κέντρο σημείο του υποχώρου και περιέχει μόνο σημεία του υποχώρου, οπότε είναι η τομή της αντίστοιχης μπάλας του μεγάλου χώρου με τον υπόχωρο.]

Θέτοντας $V = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)$ έχουμε ότι το G γράφεται στη μορφή $A \cap V$, όπου V είναι ανοικτό υποσύνολο του X (αφού είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X).

Αντίστροφα, έστω V ανοικτό υποσύνολο του X και $G = A \cap V$. Τότε, για κάθε $x \in G$ ισχύει $x \in V$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$. Έπεται ότι $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) = A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A \cap V$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του G ως προς την μετρική ρ_A. Άρα, το G είναι ανοικτό στο μετρικό υπόχωρο (A, ρ_A).

(β) Σύμφωνα με το προηγούμενο, το $A \cap \mathrm{int}_X(B)$ είναι ένα ρ_A-ανοικτό υποσύνολο του A και περιέχεται στο B. Άρα, από τη μεγιστικότητα του εσωτερικού έχουμε ότι περιέχεται στο ρ_A-εσωτερικό του B. Δηλαδή,

$$A \cap \mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B).$$

□

Σημείωση 3.3.2. Ο εγκλεισμός στην παραπάνω σχέση μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν θεωρήσουμε το $\mathbb{Z}$ ως μετρικό υπόχωρο με τη σχετική μετρική, τότε $\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ ενώ $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \emptyset$. Δηλαδή,

$$\emptyset = \mathbb{Z} \cap \mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) \subsetneq \mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

3.3.2 Σχετικώς κλειστά σύνολα

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει τα κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού υποχώρου.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω (A, ρ_A) μετρικός υπόχωρός του. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Το $F \subseteq A$ είναι κλειστό στο μετρικό χώρο (A, ρ_A) αν και μόνον αν $F = A \cap E$ όπου E κλειστό στον (X, ρ).*

(β) *Αν $B \subseteq A$ τότε $\mathrm{cl}_A(B) = A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.*

Απόδειξη. (α) Το F είναι κλειστό στο A αν και μόνον αν το $A \setminus F$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή αν και μόνον αν $A \setminus F = A \cap G$ για κάποιο G ανοικτό στον X. Δηλαδή, $A \cap F^c = A \cap G$.

Ισχυρισμός. $F = A \cap G^c$.
Δείχνουμε πρώτα ότι $F \subseteq A \cap G^c$. Αρκεί να δείξουμε ότι $F \subseteq G^c$. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα τότε υπάρχει $x \in F$ ώστε $x \in G$, δηλαδή $x \in F \cap G \subseteq A \cap G = A \cap F^c$. Άρα, $x \notin F$, άτοπο. Συνεπώς, $F \subseteq G^c$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θα δείξουμε ότι $A \cap G^c \subseteq F$. Πάλι με απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in A \cap G^c$ ώστε $x \notin F$, δηλαδή $x \in A \setminus F$ και $x \notin G$. Τότε $x \in A \cap F^c$ και $x \notin G$, το οποίο είναι άτοπο αφού $A \cap F^c = A \cap G$.

Αφού το G^c είναι κλειστό στον X, παίρνοντας $E = G^c$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Από το πρώτο μέρος της πρότασης, το σύνολο $A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ είναι ρ_A-κλειστό και $B \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$. Τότε, η πρόταση 3.2.11(β) δείχνει ότι $\mathrm{cl}_A(B) \subseteq A \cap \mathrm{cl}_X(B)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in A \cap \mathrm{cl}_X(B)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $B_\rho(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ και επιπλέον $x \in A$, άρα $B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \cap B = B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \cap B \neq \emptyset$, οπότε $x \in \mathrm{cl}_A(B)$. □

Παραδείγματα 3.3.4. (α) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το σύνολο $A = (0, 1] \cup \{2\}$. Τότε τα $(0, 1], \{2\}$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο A.

(β) Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ θεωρούμε ως υπόχωρο το xy-επίπεδο H (δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x, y, 0)$). Τότε ο δίσκος D^2 του xy-επιπέδου ($D^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$) είναι κλειστό σύνολο στον H. Μάλιστα κάθε υποσύνολο F του H είναι κλειστό στον H αν και μόνον αν είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$ (εξηγήστε γιατί).

3.4 Σημεία συσσώρευσης και σύνορο

Ορισμός 3.4.1 (σημείο συσσώρευσης)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* (*accumulation point*) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A διαφορετικό από το x. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται *παράγωγο σύνολο* του A.

Πρόταση 3.4.2. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
(β) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $A \cap B(x,\varepsilon)$ είναι άπειρο σύνολο.*
(γ) *Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \xrightarrow{\rho} x$ και $a_n \neq x$ για $n = 1, 2, \ldots$.*

Απόδειξη. (α) ⇒ (β): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \neq x$ ώστε $y \in B(x,\varepsilon)$. Υποθέτουμε ότι το μη κενό σύνολο $A \cap (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\})$ είναι πεπερασμένο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Γράφουμε $A \cap (B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) = \{y_1, \ldots, y_k\}$ και θέτουμε $\delta = \min\{\rho(x,y_1), \ldots, \rho(x,y_k)\} > 0$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \neq x$ ώστε $y \in B(x,\delta)$. Τότε, $y \in B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$ (διότι $\delta < \varepsilon$ και $y \neq x$). Συνεπώς, $y = y_i$ για κάποιο $1 \leq i \leq k$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει διότι $\rho(x,y) < \delta \leq \rho(x,y_i)$.

(β) ⇒ (γ): Το $A \cap B(x,1)$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $a_1 \neq x$ και $\rho(x,a_1) < 1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει $a_1, \ldots, a_n \in A$ ώστε $a_i \neq x$ και $\rho(x,a_i) < \frac{1}{i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Το $A \cap B(x,\varepsilon_{n+1})$ είναι άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $a_{n+1} \in A$ ώστε $a_{n+1} \neq x$ και $\rho(x,a_{n+1}) < \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A, διαφορετικών από το x, ώστε $\rho(x,a_n) < \frac{1}{n}$, απ' όπου έπεται ότι $a_n \xrightarrow{\rho} x$.

Η συνεπαγωγή (γ) ⇒ (α) είναι απλή (άσκηση). □

Σημείωση 3.4.3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε,

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Επομένως, το A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.

Ορισμός 3.4.4 (σύνορο)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται *συνοριακό σημείο* (*boundary point*) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A και σημείο του A^c. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A λέγεται *σύνορο* (*boundary*) του A και συμβολίζεται με $\mathrm{bd}(A)$ ή $\partial(A)$.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε,*
(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.
(β) $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A)$.
(γ) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A^c)$.
(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. *Ισοδύναμα,* $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. *Ειδικότερα, το* $\mathrm{bd}(A)$ *είναι κλειστό σύνολο.*
(ε) *Το A είναι κλειστό αν και μόνον αν* $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Απόδειξη. Αφήνεται για τις ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου. □

3.5 Πυκνά σύνολα και διαχωρισιμότητα

3.5.1 Πυκνά υποσύνολα

Ορισμός 3.5.1 (πυκνό υποσύνολο)**.** Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται *πυκνό* (*dense*) στον X, αν $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα 3.5.2. (α) Τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

(β) Ο c_{00} είναι πυκνός στον $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$.

Απόδειξη του (β). Θα δείξουμε ότι κάθε 1–αθροίσιμη ακολουθία προσεγγίζεται από τελικά μηδενική ακολουθία. Έστω $a=(a_n)\in\ell^1$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$, και έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Cauchy για αθροίσιμες σειρές έχουμε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $x=(a_1,\dots,a_{n_0},0,\dots)\in c_{00}$. Τότε,

$$d_1(a,x) = \|a-x\|_1 = \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n| < \varepsilon,$$

δηλαδή $x\in B_{d_1}(a,\varepsilon)$. Άρα, $c_{00}\cap B_{d_1}(a,\varepsilon)\neq\emptyset$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, $a\in\overline{c_{00}}$. □

(γ) (*Θεώρημα Kronecker*). Έστω $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta),\sin(2\pi n\theta)) : n\in\mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ (άσκηση).

Πρόταση 3.5.3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D\subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το D είναι πυκνό στον X.*

(β) *Αν F κλειστό και $D\subseteq F$, τότε $F=X$.*

(γ) *Για κάθε μη κενό ανοικτό $G\subseteq X$ ισχύει $G\cap D\neq\emptyset$.*

(δ) *Για κάθε $x\in X$ και για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $D\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$.*

(ε) *Για κάθε $x\in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D ώστε $x_n\xrightarrow{\rho}x$.*

(στ) $(X\setminus D)^\circ=\emptyset$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του X ώστε $D\subseteq F$. Τότε, $\overline{D}\subseteq\overline{F}$ δηλαδή $X\subseteq F$.

(β)⇒(γ) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό ανοικτό $G\subseteq X$ με $G\cap D=\emptyset$. Τότε, $D\subseteq G^c$. Αφού το G^c είναι κλειστό, από την υπόθεση έχουμε ότι $G^c=X$, δηλαδή $G=\emptyset$, άτοπο.

(γ)⇒(δ) Προφανής, αφού κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

(δ)⇒(ε) Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $D \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία (x_n) στοιχείων του D με $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\rho(x_n, x) \to 0$, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(ε)⇒(στ) Υποθέτουμε ότι $\mathrm{int}(X \setminus D) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $x \in X \setminus D$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus D$. Δηλαδή, $B(x, \varepsilon) \cap D = \emptyset$. Από την υπόθεση υπάρχει $(x_n) \subseteq D$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Τότε, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ και $x_n \in D$ το οποίο είναι άτοπο, διότι $B(x, \varepsilon) \cap D = \emptyset$.

(στ)⇒(α) Από την πρόταση 3.2.13 έχουμε $X \setminus \overline{D} = (X \setminus D)^\circ$. Έχουμε υποθέσει ότι $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$, άρα $X \setminus \overline{D} = \emptyset$. Δηλαδή, $\overline{D} = X$. □

Εφαρμογή 3.5.4. Το $\mathbb{Q}^n$ είναι πυκνό στον ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $1 \leq p < \infty$ (η περίπτωση $p = \infty$ αφήνεται ως άσκηση).

Έστω $x = (x(1), \ldots, x(n)) \in \ell_p^n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ μπορούμε να βρούμε $q(i) \in \mathbb{Q}$ ώστε $|q(i) - x(i)|^p < \frac{\varepsilon^p}{n}$. Θέτουμε $q = (q(1), \ldots, q(n))$. Τότε, $q \in \mathbb{Q}^n$ και, από τον ορισμό της p–μετρικής,

$$d_p(x, q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x(i) - q(i)|^p \right)^{1/p} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{n} \right)^{1/p} = \varepsilon.$$

Από την Πρόταση 3.5.3(δ) έπεται το συμπέρασμα. □

3.5.2 Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός 3.5.5 (διαχωρίσιμος μετρικός χώρος)**.** Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X λέγεται *διαχωρίσιμος* (*separable*) αν έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δηλαδή, αν υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ του X ώστε $\overline{D} = X$.

Παραδείγματα 3.5.6. (α) Ο $\mathbb{R}^n$, με οποιαδήποτε από τις p–μετρικές, είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του είναι το $\mathbb{Q}^n$.

(β) Οι χώροι ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $D = \{x \in c_{00} : x_i \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον ℓ^p. Αρχικά δείχνουμε ότι το D είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, η απεικόνιση $f : D \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ με

$$x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \overset{f}{\longmapsto} (x_1, \ldots, x_n),$$

είναι 1-1 και το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο.

Δείχνουμε τώρα ότι το D είναι πυκνό στον ℓ^p. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = (x_n) \in \ell^p$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n_0$, από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|x_i - q_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2n_0}$. Αν θέσουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ έχουμε $q \in D$ και

$$d_p^p(x,q) = \sum_{n=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < n_0 \cdot \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή, $d_p(x,q) < \varepsilon$. Συνεπώς, το D είναι πυκνό στον ℓ^p. □

Όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της παραγράφου, ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος (παράδειγμα 3.5.11(β)).

(γ) Ο κύβος του Hilbert, $\mathcal{H}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το σύνολο E των τελικά μηδενικών ακολουθιών με ρητές συντεταγμένες στο $[-1,1]$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathcal{H}^\infty$. Για την πυκνότητα θεωρούμε τυχόν $x \in \mathcal{H}^\infty$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για τους x_i, $i = 1, \ldots, n_0$ που ανήκουν στο $[-1,1]$ υπάρχουν ρητοί $q_i \in [-1,1]$ ώστε $\frac{|x_i - q_i|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Θέτουμε $q = (q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, \ldots)$ και έχουμε

$$d(x,q) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|x_n - q_n|}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Η αριθμησιμότητα του E προκύπτει όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. □

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων μέσω του «πληθαρίθμου μιας *βάσης* της τοπολογίας»[3] τους. Πιο συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

Θεώρημα 3.5.7. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι διαχωρίσιμος.*

(β) *Υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, η οποία έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$.*

Απόδειξη. (α)⇒(β). Έστω $D = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{O} = \left\{ B(x_n, q) : q \in \mathbb{Q}^+,\, x_n \in D \right\},$$

[3]Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται *βάση* για την τοπολογία του X αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subseteq X$ και για κάθε $x \in V$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B \subseteq V$.

η οποία είναι αριθμήσιμη και αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Θα δείξουμε ότι αυτή έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και έστω $x \in G$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < 2q < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, η μπάλα $B(x, q)$ περιέχει ένα στοιχείο του D, έστω x_n. Παρατηρήστε ότι $x \in B(x_n, q)$ (αφού $x_n \in B(x, q)$) και $B(x_n, q) \subseteq G$. Πράγματι, αν $y \in B(x_n, q)$ τότε

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < q + q < \varepsilon,$$

δηλαδή $y \in B(x, \varepsilon) \subseteq G$.

(β)⇒(α). Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X που ικανοποιεί το (β). Για κάθε $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}$ επιλέγουμε τυχόν $x_U \in U$. Τότε, το $D = \{x_U : U \in \mathcal{O}\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X (εξηγήστε γιατί). □

Πόρισμα 3.5.8. *Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε υπόχωρος A του X είναι επίσης διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathcal{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$. Τότε, η αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{O}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του υποχώρου A και έχει την ίδια ιδιότητα. Άρα, ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. □

Η επόμενη πρόταση μας δίνει κριτήριο και «μέθοδο» για να δείχνουμε ότι ένας μετρικός χώρος *δεν* είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 3.5.9. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και έστω A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x, y) \ge \varepsilon$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, ο (X, ρ) δεν είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος. Τότε, έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D. Θεωρούμε τις μπάλες $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, $x \in A$. Αυτές είναι ξένες ανά δύο και υπεραριθμήσιμες το πλήθος. Καθώς το D είναι πυκνό, έχουμε $D \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή υπάρχει $d_x \in D$ ώστε $d_x \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Ορίζουμε την απεικόνιση $A \ni x \longmapsto d_x \in D$, η οποία είναι 1-1. Δηλαδή, το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D. Άτοπο, διότι το D είναι αριθμήσιμο, ενώ το A υπεραριθμήσιμο. □

Πρόταση 3.5.10. *Σε κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X, ρ) κάθε οικογένεια από ξένες ανοικτές μπάλες είναι το πολύ αριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με κάποια παραδείγματα μη διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Παραδείγματα 3.5.11. (α) Ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δηλαδή, το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 3.5.9 με $A = \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $\delta(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Συνεπώς, ο $(\mathbb{R}, \delta)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, □

Γενικότερα, αν έχουμε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο S και το εφοδιάσουμε με τη διακριτή μετρική τότε ο (S, δ) είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

(β) Ο $\ell^\infty \equiv (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Στον ℓ^∞ θεωρούμε το σύνολο $S = \{\chi_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$, όπου χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \notin A$. Τότε, το S είναι ισοπληθικό με το $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο (βλέπε Παράρτημα Α′). Επιπλέον, αν $A \neq B$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο οποίο θα διαφέρουν, οπότε $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| \geq 1$ άρα $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty \geq 1$ και συνεπώς οι μπάλες $B\left(\chi_A, \frac{1}{2}\right)$ είναι ξένες ανά δύο. Από την πρόταση 3.5.9 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. □